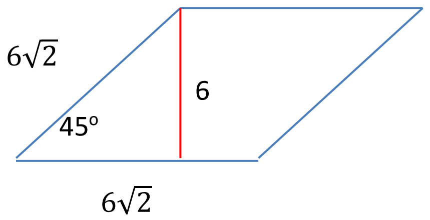
Zad.1. Liczba przeciwna do liczby $(1-\sqrt{3})^2$ jest równa:

A	$4-2\sqrt{3}$	**B**	$4+2\sqrt{3}$	**C**	$-4+2\sqrt{3}$	**D**	-2

$$(1-\sqrt{3})^2=(1-\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})=1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}$$
$$-(4-2\sqrt{3})=-4+2\sqrt{3}$$

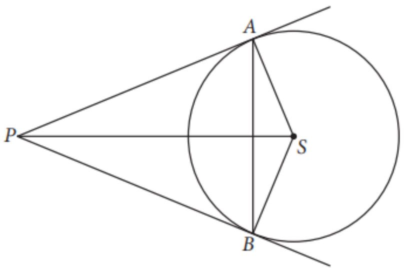
Zad.2. Dany jest romb, w którym kąt ostry ma miarę 45°, a wysokość wynosi 6 cm. Ile wynosi pole tego rombu?

A	$36\sqrt{2}cm^2$	**B**	$36cm^2$	**C**	$24\sqrt{2}cm^2$	**D**	$18\sqrt{2}cm^2$



$$Pole=a\cdot h=6\sqrt{2}\cdot 6=36\sqrt{2}$$

Zad.3. Z punktu P poprowadzono dwie styczne do okręgu w punktach A i B (zobacz rysunek). Promień okręgu ma długość 5, a odległość punktu P od środka S tego okręgu jest równa 13. Ile wynosi pole deltoidu PBSA?



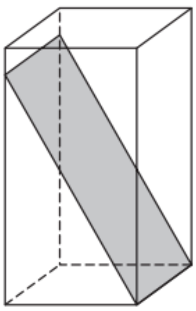
$$P\Delta PSA=P\Delta PSB$$
$$PA^2+AS^2=PS^2$$
$$PA^2+5^2=13^2$$
$$PA^2=169-25$$
$$PA=\sqrt{144}=12$$

$$Pole\ deltoidu=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=60$$

A	30	**B**	60	**C**	64	**D**	65

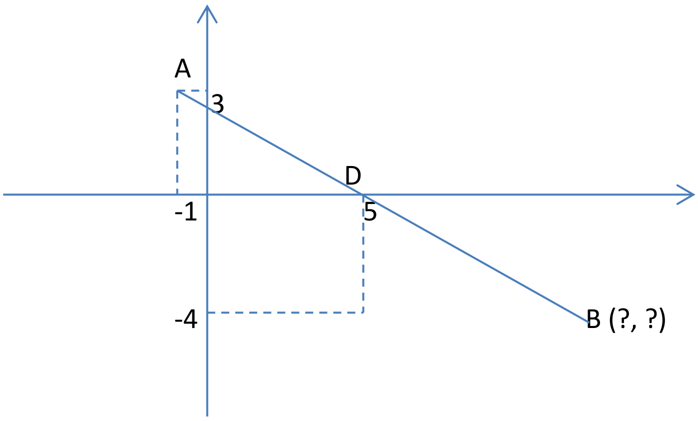
Zad.4. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 1. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt 60° (zobacz rysunek). Pole otrzymanego przekroju wynosi:

A	1
B	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
C	$\sqrt{3}$
D	2



Zad.5. Punkt A=(-1, 3) jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB. Punkt D=(5, -4) jest spodkiem wysokości CD tego trójkąta. Współrzędne wierzchołka B są równe:

A	$(11,-11)$	**B**	$(-11,11)$	**C**	$(-7,10)$	**D**	$7,-10$



Korzystamy ze wzory na współrzędne środka

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_s = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

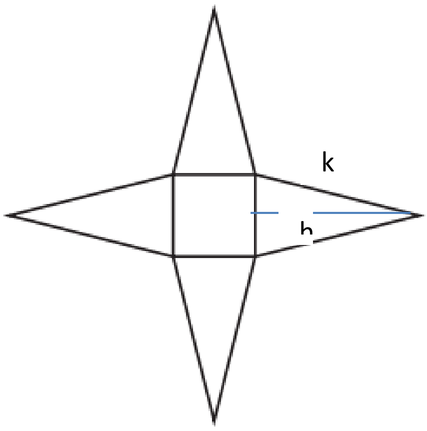
$$5 = \frac{-1 + x_2}{2}$$

$$10 = -1 + x_2$$

$$x_2 = 11 - \mathit{drugiej\ współrzędnej\ nie\ musimy\ już\ liczyć}$$

Zad.6. Siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego składa się z kwadratu i czterech trójkątów (rysunek obok). Pole każdej z wymienionych figur jest równe 4. Długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa jest równa:

A	$\sqrt{5}$
B	$2\sqrt{5}$
C	$\sqrt{17}$
D	$2\sqrt{17}$



$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

$$\boldsymbol{Pole\ trójkąta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h$$

$$4 = 2h$$

$$h = 2$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$$\boldsymbol{k^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$

$$\boldsymbol{k^2 = 2^2 + 1^2}$$

$$\boldsymbol{k = \sqrt{5}}$$

Zad.7. Wszystkie oceny Ani z matematyki to 5, 4, 6, 5, 5 i nieznana ocena x. Średnia arytmetyczna wszystkich ocen Ani jest większa niż ich mediana. Tą oceną może być

A	3	B	4	C	5	D	6

$$\boldsymbol{Mediana < Średnia}$$

Wstawiana liczba	Liczby	Mediana	Średnia
3	**3,4,5,5,5,6**	**5**	$\frac{28}{6} = 4\frac{2}{3}$
4	**4,4,5,5,5,6**	**5**	$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$
5	**4,5,5,5,5,6**	**5**	$\frac{30}{6} = 5$
6	**4,5,5,5,6,6**	**5**	$\frac{31}{6} = 5\frac{1}{6}$

Zad.8. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym, którego krawędź podstawy ma długość a, pole powierzchni bocznej jest 8 razy większe od pola podstawy. Objętość tego graniastosłupa wynosi:

A	$8a^3$	B	$2a^3$	C	$\frac{a^3}{32}$	D	$\frac{2}{3}a^3$

$$Ppc = 2Pp + Pb$$
$$Ppb = 8a^2 = a \cdot H$$
$$8a^2 = a \cdot H$$
$$8a = H$$

$$V = Pp \cdot H = a^2 \cdot 8a = 8a^3$$

Zad.9. Punkt $P = (-6, -8)$, przekształcono najpierw w symetrii względem osi OX, a potem w symetrii względem osi OY. W wyniku tych przekształceń otrzymano punkt Q . Zatem:

A	$Q = (6,8)$	B	$(-6,-8)$	C	$(8,6)$	D	$(-8,-6)$

Punkt	Symetria względem OX	Symetria względem OY
$\boldsymbol{P = (-6, -8)}$	$\boldsymbol{P = (-6, 8)}$	
$\boldsymbol{P = (-6, 8)}$		$\boldsymbol{P = (6, 8)}$

Zad.10. Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt z 31 grudnia 2011 r. o 120% i obecnie jest równa 8910. Ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku?

A	4050	B	1782	C	7425	D	7128

$$x + 120\%x = x + 1{,}2x = 2{,}2x$$
$$2{,}2x = 8910$$
$$x = 4050$$

OTWARTE

Zad.1. Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 30 losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, w którym obie wylosowane liczby będą podzielne przez 3.

Wszystkich możliwych wyników jest 380

Dlaczego?

Wszystkich liczb dwucyfrowych do 30 jest 20.

Jeśli za pierwszym razem jakaś liczba dwucyfrowa została wylosowana, to za drugim razem już nie możemy jej wylosować, gdyż losujemy bez zwracania. Zostaje wówczas tylko 19 liczb dwucyfrowych. W związku z tym pierwszą liczbę możemy połączyć z 19 innymi różnymi od niej.

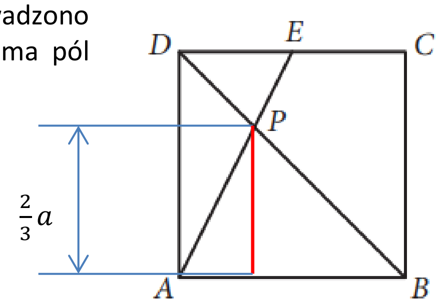
$$Wniosek\ N\ =\ 20 \cdot 19 = 380 - wszystkie\ mozliwe\ wyniki$$

Przynajmniej jedna z liczb musi dzielić się przez 3. Należą do nich: 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. Losując jedna z nich za pierwszym razem, za drugim razem możemy wylosować już tylko 5 z podanych, gdyż nie mogą się powtarzać.

$$A - wyników\ sprzyjajacych\ będzie: 6 \cdot 5 = 30\ np. \{(12,15); (12,18); (12,21); (12,24); (12,27); (12,30)(15,12) \ldots (30,27)\}$$

$$P(A) = \frac{30}{380} = \frac{3}{38}$$

Zad.2.** W kwadracie ABCD, w którym punkt E jest środkiem boku CD, poprowadzono przekątną BD i odcinek AE, które przecięły się w punkcie P. Uzasadnij, że suma pól trójkątów ABP i DEP stanowi $\frac{5}{12}$ pola kwadratu ABCD.



$$Pole\ kwadratu = \ a^2$$

$$Trójkąt\ DPE\ jest\ podobny\ do\ trójkąta\ APB$$

Dlaczego?

$$|\sphericalangle \boldsymbol{BDE}| = |\sphericalangle \boldsymbol{PBA}| - \boldsymbol{kąty\ naprzemianległe}$$
$$|\sphericalangle \boldsymbol{AED}| = |\sphericalangle \boldsymbol{EAB}| - \boldsymbol{katy\ naprzemianległe}$$
$$|\sphericalangle \boldsymbol{APB}| = |\sphericalangle \boldsymbol{DPE}| - \boldsymbol{kąty\ wierzchołkowe}$$

Wniosek: wszystkie kąty są takie same, dlatego trójkąty są podobne.

$$|\boldsymbol{DE}| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}|\boldsymbol{AB}|$$

$$z\ tego\ wynika, że\ długości\ boków\ trójkąta\ ABP\ są\ dwa\ razy\ dłuższe\ niż\ odpowiednie\ boki\ w\ trójkącie\ DPE$$

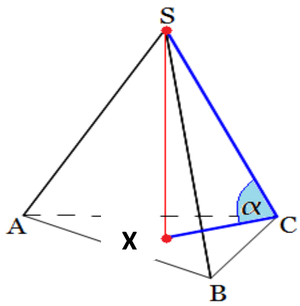
Również wysokość w trójkącie DPE jest dwa razy krótsza niż w trójkącie APB

Wysokość obu tych trójkątów wynosi $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a = a$

$$Pole\ trójkąta\ DPE = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}a = \frac{1}{12}a^2$$
$$Pole\ trójkąta\ APB = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{3}a = \frac{2}{6}a^2 = \frac{4}{12}a^2$$

$$Pole\ trójkątów\ DPE\ i\ APB = \frac{1}{12}a^2 + \frac{4}{12}a^2 = \frac{5}{12}a^2$$

Zad.3. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości $2\sqrt{3}$ krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

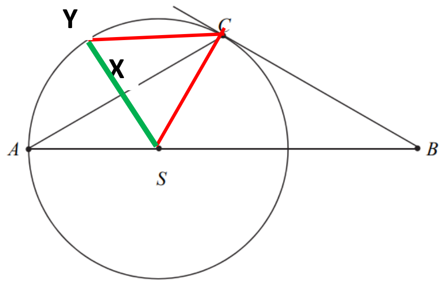


$$H = \frac{2}{3}h\ podstawy, gdyż\ trójkąt\ CSX\ jest\ równoramienny$$
$$|SC| = k - krawędź$$
Z trójkąta o katach 90°,45°,45°
$$k = |SC|\sqrt{2} = H\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$
$$\frac{2}{3}h\ podstawy = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{2}{3}h = 2\sqrt{3}$$
$$2h = 6\sqrt{3}$$
$$h = 3\sqrt{3}$$
Z wysokości trójkąta równobocznego
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$6\sqrt{3} = a\sqrt{3}$$
$$a = 6$$

$$Pole\ podstawy = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}Pp\cdot H$$
$$V = \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 6\cdot 3 = 18$$

Zad.4. Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r, a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C, a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę 120° .



$$|\sphericalangle BCS| = 90^o$$

$$|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SAC| - trójkąt\ ASC\ jest\ równoramienny\ (boki\ są\ promieniami)$$
$$|\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SAC| = \alpha$$

$$|CX| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$-z\ tego\ wynika, że\ odcinek\ CX\ jest\ eysokością\ trójkąta\ równobocznego\ CXY, a\ tym\ samym\ kąt\ XCS$ $ma\ miarę\ 30^o, gdyż\ CX\ jest\ dwusieczną\ kąta\ SCY.$

$$|\sphericalangle XCS| + |\sphericalangle SCB| = 30^o + 90^o = 120^o$$

Zad.5. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru {1, 3, 5, 7, 9} , i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru {0, 2, 4, 6, 8} .

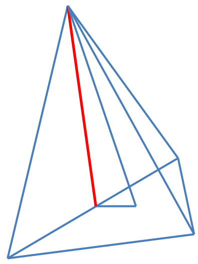
1	**0**
	2
	4
	6
	8
3	**0**
	2
	4
	6
	8
5	**0**
	2
	4
	6
	8
7	**0**
	2
	4
	6
	8
9	**0**
	2
	4
	6
	8

$Wszystkich\ liczb\ dwucyfrowych\ jest\ 90$

$Liczb\ sprzyjajacych\ naszemu\ doświadczeniu\ jest\ 25$

$$P(A) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

Zad.6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



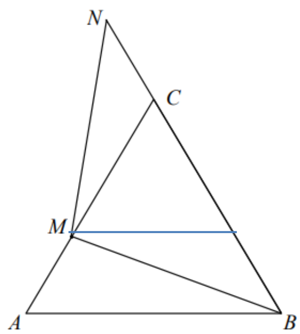
$$\textbf{Pole boczne} = 3 \cdot \mathrm{P}\Delta$$
$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h$$
$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$$
$$15 = 3 \cdot \frac{5}{2} a$$
$$30 = 15a$$
$$a = 2$$
$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$
$$\frac{1}{3} h_p = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$$H^2 + \left(\frac{1}{3} h_p\right)^2 = (h\ \acute{s}ciany\ bocznej)^2$$
$$H^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2$$
$$H^2 + \frac{3}{9} = \frac{75}{16}$$
$$H^2 = \frac{75}{16} - \frac{1}{3}$$
$$H^2 = \frac{225}{48} - \frac{16}{48}$$
$$H = \sqrt{\frac{225-16}{48}} = \sqrt{\frac{209}{48}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{209}{48}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{209}{48}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}$$

Zad.7. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

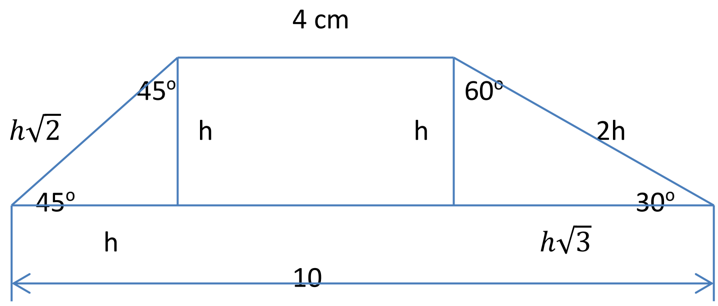


$$\Delta MCN \equiv \Delta BMX\ (bok, kąt, bok)$$
$$MC = MX$$
$$BX = NC$$
$$kaątMCN = kątBXM$$
MN=BM

Zad.8*. Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10 .

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 3^2 - 2^n \cdot 2^2 + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 3^2 + 3^n - 2^n \cdot 2^2 - 2^n =$$
$$3^n(3^2+1) - 2^n(2^2+1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2^1 \cdot 5$$
$$= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$$

Zad.9. Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45°. Oblicz wysokość tego trapezu.



$$10 = h + h\sqrt{3} + 4$$
$$6 = h + h\sqrt{3}$$
$$6 = h(1+\sqrt{3})$$
$$h = \frac{6}{1+\sqrt{3}}$$